

# Teoria de Sturm-Liouville e Problemas de Valores de Contorno

João Antonio Francisconi Lubanco Thomé  
Bacharelado em Matemática - UFPR  
*jolubanco@gmail.com*

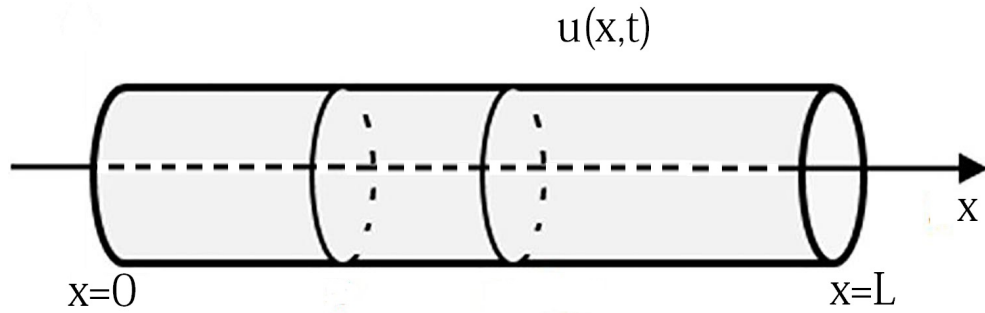
Prof. Dr. Fernando de Ávila Silva  
Departamento de Matemática - UFPR  
*fernando.avila@ufpr.br*

## Resumo

No estudo das Equações Diferenciais Parciais, em particular na equação do calor homogênea, nos deparamos com o método de separação de variáveis para obtenção da solução formal do problema. Este método consiste na suposição da independência das variáveis em questão, e a consideração que a solução possa ser descrita como um produto de duas outras funções independentes. Neste caso, nos deparamos com uma equação diferencial ordinária no qual temos de encontrar suas soluções. Assim, neste trabalho iremos utilizar a Teoria de Sturm-Liouville para a resolução destas EDO's mais gerais, e conseqüentemente obter um método de encontrar a solução da equação do calor não-homogênea.

## 1 Condução de Calor em Uma Barra Homogênea de Seção Reta Uniforme

Considere o problema de condução de calor em uma barra de seção reta uniforme feita com material homogêneo. Escolha o eixo  $x$  como sendo o eixo da barra, tal que  $x = 0$  e  $x = L$  correspondem às extremidades da barra. Suponha ainda que os lados da barra estão perfeitamente isolados, de modo que não haja transmissão de calor. Suponha também que as dimensões da seção reta são tão pequenas que a temperatura  $u$  pode ser considerada constante em qualquer seção reta, então  $u$  só depende da coordenada espacial  $x$  e do instante  $t$ .



Assim, estamos interessados em determinar uma função  $u = u(x, t)$  que descreva a condução de calor na barra. A equação diferencial que descreve esse processo, junto com suas condições iniciais e de contorno, é dada por

$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx} = u_t & 0 \leq x \leq L & t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x) & 0 \leq x \leq L \\ u(0, t) = 0 & u(L, t) = 0 & t \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

sendo  $\alpha^2$  uma constante conhecida como *difusidade térmica* que depende apenas do material da barra. Queremos encontrar uma função  $u(x, t)$  de modo a satisfazer o problema (1). Para isso vamos utilizar o método de separação de variáveis. Portanto, suponha que:

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (2)$$

Assim, substituindo (2) na EDP de (1), temos:

$$\alpha^2 X''(x)T(t) = X(x)T'(t)$$

Agora, podemos separar as variáveis de modo a obter:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'(t)}{T(t)} \quad (3)$$

Note que, como cada membro da igualdade depende de uma variável independente, se fixamos  $x$ , por exemplo, e começarmos a variar  $t$ , chegaremos que a igualdade não será satisfeita. Desta forma é necessário que a igualdade (3) seja igual a uma constante, e para isso tomaremos como sendo  $-\lambda$  por motivos de simplicidade futura. Logo:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda \quad (4)$$

Separando a equação (4), chegamos em:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ T'(t) + \lambda \alpha^2 T(t) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Note que nosso problema original era resolver uma equação diferencial parcial, sob certas condições de contorno e iniciais, e agora conseguimos reduzir a solução de (1) à resolução de duas equações diferenciais ordinárias. Portanto, a solução do problema será obtida a partir do produto das soluções do sistema (5). Agora vamos aplicar as condições de contorno (1) em (2). Assim, para  $u(0, t) = 0$  temos:

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0$$

Veja que se tivermos  $T(t) = 0$  então  $u(x, t) = X(x)T(t) = 0$  para todo  $x$  e portanto a condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$  só seria satisfeita se  $f(x) = 0$ . Portanto, como não queremos apenas o caso trivial, devemos ter  $X(0) = 0$ . Analogamente chegamos que  $X(L) = 0$  e assim obtemos o seguinte problema de valores de contorno homogêneo:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \text{ e } X(L) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Assim, vamos considerar os seguintes casos:

(i) Suponha  $\lambda < 0$ . Fazendo  $\lambda = -\mu^2$ , temos que:

$$X'' - \mu^2 X = 0$$

Sua equação característica é da forma  $m^2 - \mu^2 = 0$  e portanto suas raízes são  $m = \pm\mu$ . Desta forma a solução é da forma:

$$X(x) = c_1 \cosh(\mu x) + c_2 \sinh(\mu x)$$

Agora, aplicando as condições de contorno, temos que para  $X(0) = 0$ , implica:

$$c_1 \cosh(\mu 0) + c_2 \sinh(\mu 0) = 0$$

E assim  $c_1 = 0$ . Já para a segunda condição temos que  $X(L) = 0$  então:

$$c_1 \cosh(\mu L) + c_2 \sinh(\mu L) = 0$$

Pelo o que acabamos de ver  $c_1 = 0$ , logo:

$$c_2 \sinh \mu L = 0$$

Como supomos que  $\lambda < 0$  consequentemente  $\mu \neq 0$  e portanto  $\sinh \mu L \neq 0$ . Desta forma,  $c_2 = 0$ . Veja que a solução da nossa equação diferencial ordinária é apenas a solução trivial  $X(0) = 0$ , e como não estamos interessados nesse caso, chegamos a conclusão que para  $\lambda < 0$  o problema de valores de contorno não possui soluções não triviais.

(ii) Suponha  $\lambda = 0$ . Assim:

$$X''(x) = 0$$

cuja solução é  $X(x) = c_1x + c_2$ . Aplicando as condições de contorno, chegamos em  $c_2 = 0$  para  $X(0) = 0$  e  $c_1 = 0$  para  $X(L) = 0$ . Logo, a solução para  $\lambda = 0$  é da forma  $X(x) = 0$ , e assim o problema não possui soluções não triviais para  $\lambda = 0$ .

(iii) Suponha agora que  $\lambda > 0$ . Por praticidade, vamos tomar  $\lambda = \mu^2$ , desta forma:

$$X'' + \mu^2 X = 0$$

Sua equação característica é  $m^2 + \mu^2 = 0$  com  $m = \pm\mu$ , e assim a solução geral é dada por:

$$X(x) = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x$$

Como  $\lambda > 0$ , por hipótese, temos que  $\mu \neq 0$  e sem perda de generalidade podemos tomar  $\mu > 0$ . Assim, para a condição de contorno  $X(0) = 0$  temos:

$$c_1 \cos \mu 0 + c_2 \sin \mu 0 = 0$$

O que decorre  $c_1 = 0$ . Já para a condição  $X(L) = 0$ , vale:

$$c_2 \sin \mu L = 0$$

Como não queremos a solução trivial para nosso problema, é necessário ter  $c_2 \neq 0$  e assim:

$$\sin \mu L = 0$$

Para isso ocorrer, devemos ter  $\mu L = n\pi$ . Logo,  $\mu = \frac{n\pi}{L}$  com  $n \in \mathbb{Z}_+^*$ . Assim, como definimos  $\lambda = \mu^2$ , temos que para cada  $n$ .

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}$$

é um autovalor do problema (6). Como já vimos, a solução é dada por:

$$X(x) = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x$$

Utilizando os resultados que nós já obtemos, que:

$$X_n(x) = c_2 \sin \frac{n\pi x}{L} \quad n \in \mathbb{Z}_+^*$$

E como a solução é válida para qualquer  $c_2 \in \mathbb{R}$ , tomaremos o caso  $c_2 = 1$ , por simplicidade. Desta forma:

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L} \quad n \in \mathbb{Z}_+^*$$

Portanto, as únicas soluções não triviais para o problema:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \text{ e } X(L) = 0 \end{cases}$$

são as autofunções:

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L} \quad n \in \mathbb{Z}_+^*$$

Associadas aos autovalores:

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \quad n \in \mathbb{Z}_+^*$$

Agora que já conhecemos  $\lambda$ , vamos substituir na equação  $T'(t) + \alpha^2\lambda T(t) = 0$ . Assim:

$$T'(t) + \frac{n^2\pi^2}{L^2}\alpha^2 T(t) = 0$$

Portanto a solução é dada por:

$$T_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2}t}$$

Onde tomamos a constante de proporcionalidade como  $c_1 = 1$ . Agora que já possuímos as soluções para os dois problemas, como supomos no início que  $u(x, t) = X(x)T(t)$ , podemos multiplicá-las para obter as soluções fundamentais do problema, sendo assim:

$$u_n(x, t) = e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2}t} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad n \in \mathbb{Z}_+^*$$

Que satisfaz a equação diferencial parcial e as condições de contorno de (1) para todo  $n$  inteiro positivo. Entretanto, resta satisfazer a condição inicial:

$$u(x, 0) = f(x) \quad 0 \leq x \leq L$$

Admitindo que a solução do problema é uma combinação linear de todas as soluções fundamentais encontramos:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2}t} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Veja que cada termo da soma satisfaz a equação diferencial e suas condições de contorno. Desta forma, vamos supor que a série converge e também satisfaz as condições de contorno. Para a condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$ , devemos ter:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (7)$$

Precisamos escolher os coeficientes  $c_n$  tais que a série de funções convirja para a distribuição inicial de temperatura  $f(x)$ , com  $0 \leq x \leq L$ . Veja que série (7) é a Série de Fourier em senos da função  $f$ , e seu coeficiente é dado pelas Fórmulas de Euler-Fourier. Admitindo que  $f$  é uma função ímpar com período  $T = 2L$ , temos:

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

Por fim, a solução formal do problema

$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx} = u_t & 0 \leq x \leq L & t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x) & 0 \leq x \leq L \\ u(0, t) = 0 & u(L, t) = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

é dado pela função

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 \alpha^2}{L^2} t} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

com coeficiente  $c_n$  determinado por

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

## 2 Problemas de de Valores de Contorno de Sturm-Liouville

Agora, estamos interessados em generalizar os resultados da seção 1, de modo a utilizar o método de separação de variáveis em problemas mais gerais. Então, vamos considerar equações diferenciais parciais

$$r(x)u_t = [p(x)u_x]_x - q(x)u + F(x, t) \quad (8)$$

junto de condições de contorno da forma

$$u_x(0, t) - h_1 u(0, t) = 0 \quad \text{e} \quad u_x(L, t) + h_2 u(L, t) = 0 \quad (9)$$

Em determinado momento do processo de obtenção da solução do problema de valor de contorno para a equação do calor, foi necessário encontrar as soluções para o seguinte problema

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \text{ e } X(L) = 0 \end{cases}$$

Assim, nesta seção nosso interesse estará voltado para essa classe de problemas, chamados de *problemas de valores de contorno de Sturm-Liouville (PSL)*, em que podemos caracterizá-lo de uma maneira mais geral por

$$\begin{cases} [p(x)y']' - q(x)y + \lambda r(x)y = 0 & 0 < x < 1 \\ a_1y(0) + a_2y'(0) = 0 \\ b_1y(1) + b_2y'(1) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

onde  $p, p', q$  e  $r$  são contínuas no intervalo  $[0, 1]$  e que, além disso,  $p(x) > 0$  e  $r(x) > 0$  em todos os pontos deste intervalo. Além disso, para facilitar a notação, podemos definir o operador diferencial linear homogêneo  $L$ , dado por

$$\begin{aligned} L : C^2 &\longrightarrow C^2 \\ y &\longmapsto L[y] = \lambda r(x)y \end{aligned}$$

onde

$$L[y] = -[p(x)y']' + q(x)y$$

Assim, vamos estabelecer algumas propriedades para o PSL, de modo a obter uma solução para o problema de condução de calor não-homogêneo.

**Proposição 1.** *O operador  $L$  é linear.*

*Demonstração.* Considere  $y, z \in C^2[(0, 1)]$ . Assim, temos que:

$$\begin{aligned} L[y + z] &= -[p(y + z)']' + q(y + z) \\ &= -[py' + pz']' + qy + qz \\ &= -[py']' - [pz']' + qy + qz \\ &= (-[py']' + qy) + (-[pz']' + qz) \\ &= L[y] + L[z] \end{aligned}$$

Portanto,  $L[y + z] = L[y] + L[z]$ . Agora, considere  $\lambda \in \mathbb{C}$  e  $y \in C^2[(0, 1)]$ , então:

$$\begin{aligned} L[\lambda y] &= -[p(\lambda y)']' + q(\lambda y) \\ &= \lambda [-[p(y)']' + q(y)] \\ &= \lambda L[y] \end{aligned}$$

Então  $L[\lambda y] = \lambda L[y]$  e portanto,  $L$  é um operador linear.  $\square$

**Teorema 1** (Identidade de Lagrange). *Considere o operador  $L[y] = -[p(x)y']' + q(x)y$  onde  $p, p', q$  são funções contínuas no intervalo  $[0, 1]$ . Se  $u, v \in C^2([0, 1])$  então vale a identidade:*

$$\int_0^1 \{L[u]v - uL[v]\}dx = -p(x)[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)] \Big|_0^1$$

*Demonstração.* Integrando por partes a seguinte integral, chegamos que:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 L[u]v dx &= \int_0^1 [-(pu')'v + quv] dx \\
&= \int_0^1 [-(pu')'v] dx + \int_0^1 quv dx \\
&= -vp u' \Big|_0^1 + \int_0^1 pv' u' dx + \int_0^1 quv dx \\
&= -vp u' \Big|_0^1 + pv' u \Big|_0^1 - \int_0^1 u(pv')' dx + \int_0^1 quv dx \\
&= -vp u' \Big|_0^1 + pv' u \Big|_0^1 + \int_0^1 [-(pv')'u + quv] dx \\
&= -vp u' \Big|_0^1 + pv' u \Big|_0^1 + \int_0^1 L[v]u dx
\end{aligned}$$

Portanto, temos a seguinte igualdade:

$$\int_0^1 L[u]v dx = -vp u' \Big|_0^1 + pv' u \Big|_0^1 + \int_0^1 L[v]u dx \quad (11)$$

Por fim, manipulando a equação (11), chegamos que:

$$\int_0^1 \{L[u]v - uL[v]\} dx = -p(x)[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)] \Big|_0^1$$

□

**Corolário 1.** *Se considerarmos a Identidade de Lagrange de modo que as funções  $u$  e  $v$  satisfaçam as condições abaixo:*

$$(i) \quad a_1 u(0) + a_2 u'(0) = 0$$

$$(ii) \quad b_1 u(1) + b_2 u'(1) = 0$$

$$(iii) \quad a_1 v(0) + a_2 v'(0) = 0$$

$$(iv) \quad b_1 v(1) + b_2 v'(1) = 0$$

Então, temos que:

$$\int_0^1 \{L[u]v - uL[v]\} dx = 0$$

*Demonstração.* Vamos considerar primeiro o caso em que  $a_2 \neq 0$  e  $b_2 \neq 0$ . Assim,

$$\int_0^1 \{L[u]v - uL[v]\} dx = -p(x)[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)] \Big|_0^1$$

Supondo que  $u$  e  $v$  satisfazem as condições de (i) à (iv), temos que:

$$\int_0^1 \{L[u]v - uL[v]\} dx = p(1)[v'(1)u(1) - v(1)u'(1)] - p(0)[v'(0)u(0) - v(0)u'(0)]$$

Como por hipótese temos  $a_2 \neq 0$  e  $b_2 \neq 0$ , e decorrendo das condições iniciais, temos:



$$\begin{cases} v'(1) = -\frac{b_1}{b_2}v(1) & v'(0) = -\frac{a_1}{a_2}v(0) \\ u'(1) = -\frac{b_1}{b_2}u(1) & u'(0) = -\frac{a_1}{a_2}u(0) \end{cases}$$

Portanto, segue que:

$$\int_0^1 \{L[u]v - uL[v]\}dx = p(1) \left[ -\frac{b_1}{b_2}v(1)u(1) + \frac{b_1}{b_2}u(1)v(1) \right] - p(0) \left[ -\frac{a_1}{a_2}v(0)u(0) + \frac{a_1}{a_2}u(0)v(0) \right]$$

Assim,  $\int_0^1 \{L[u]v - uL[v]\}dx = 0$ . Já para o caso  $a_2 = b_2 = 0$ , temos:

$$\begin{cases} a_1v(0) = 0 & b_1v(1) = 0 \\ a_1u(0) = 0 & b_1u(1) = 0 \end{cases}$$

E segue disto, que  $\int_0^1 \{L[u]v - uL[v]\}dx = 0$ . Nos casos em que  $a_2 = 0$  ou  $b_2 = 0$  é análogo aos demais.  $\square$

Segue do Corolário 1 que podemos reformular a escrita do resultado, de modo a utilizar à definição de produto interno dada por:

$$\langle u, v \rangle \doteq \int_0^1 u(x)v(x)dx$$

Assim temos que:

$$\int_0^1 \{L[u]v - uL[v]\}dx = 0 \iff \langle L[u], v \rangle = \langle u, L[v] \rangle \quad (12)$$

**Teorema 2.** *Sejam  $u$  e  $v$  funções complexas e o produto interno  $\langle, \rangle$  definido por:*

$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 u(x)\overline{v(x)}dx$$

*Então, o operador  $L$  é auto-adjunto, ou seja:*

$$\langle L[u], v \rangle = \langle u, L[v] \rangle$$

*Demonstração.* Queremos mostrar que vale a igualdade  $\langle L[u], v \rangle - \langle u, L[v] \rangle = 0$ . Assim, considere  $u = u_1 + iu_2$  e  $v = v_1 + iv_2$ , com  $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}
\langle L[u], v \rangle - \langle u, L[v] \rangle &= \int_0^1 L[u] \bar{v} dx - \int_0^1 u \overline{L[v]} dx \\
&= \int_0^1 \{L[u_1 + iu_2] \overline{(v_1 + iv_2)} - (u_1 + iu_2) \overline{L[v_1 + iv_2]}\} dx \\
&= \int_0^1 \{(L[u_1] + iL[u_2])(v_1 - iv_2) - (u_1 + iu_2) \overline{(L[v_1] + iL[v_2])}\} dx \\
&= \int_0^1 \{(L[u_1]v_1 - iL[u_2]v_2 + iL[u_2]v_1 + L[u_2]v_2) - \\
&\quad -(u_1L[v_1] - iu_1L[v_2] + iu_2L[v_1] + u_2L[v_2])\} dx \\
&= \int_0^1 \{(L[u_1]v_1 - u_1L[v_1]) + i(L[u_2]v_1 - L[u_1]v_2) + \\
&\quad +(L[u_2]v_2 - u_2L[v_2]) + i(L[v_2]u_1 - L[v_1]u_2)\} dx
\end{aligned}$$

Como  $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ , segue da Corolário 1 que:

$$\int_0^1 (L[u_1]v_1 - u_1L[v_1])dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_0^1 (L[u_2]v_2 - u_2L[v_2])dx = 0$$

E portanto, temos:

$$\begin{aligned}
\langle L[u], v \rangle - \langle u, L[v] \rangle &= \int_0^1 i\{(L[u_2]v_1 - L[u_1]v_2) + (L[v_2]u_1 - L[v_1]u_2)\} dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

Segue do Corolário 1

Por fim,  $\langle L[u], v \rangle - \langle u, L[v] \rangle = 0$  o que implica  $\langle L[u], v \rangle = \langle u, L[v] \rangle$ .

□

**Lema 1.** *Sejam  $f$  contínua no intervalo  $[0, 1]$  e  $f(x) > 0$  para todo  $x \in [0, 1]$ , então  $\int_0^1 f(x)dx > 0$ .*

**Teorema 3.** *Todos os autovalores do Problema de Sturm-Liouville são reais.*

*Demonstração.* Suponha que  $\lambda$  é um autovalor do P.S.L tal que  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Logo,  $\lambda = u + iv$ , onde  $u, v \in \mathbb{R}$  e considere  $\phi = w + iz$  uma autofunção do P.S.L associada ao autovalor  $\lambda$ , de modo que  $w, z \in \mathbb{R}$ . Assim, tomando  $u = \phi$  e  $v = \phi$  na igualdade do Teorema 2, temos:

$$\langle L[\phi], \phi \rangle = \langle \phi, L[\phi] \rangle$$

Como  $\phi$  é uma autofunção do P.S.L, associada ao autovalor  $\lambda$ , temos que  $\phi$  é solução do P.S.L e portanto  $L[\phi] = \lambda r\phi$ , de modo que:

$$\langle \lambda r\phi, \phi \rangle = \langle \phi, \lambda r\phi \rangle$$

Pela definição do produto interno complexo usual, temos:

$$\int_0^1 \lambda r(x) \phi(x) \overline{\phi(x)} dx = \int_0^1 \phi(x) \overline{\lambda r(x) \phi(x)} dx$$

Como já foi definido,  $r(x)$  é um função real, e assim:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \lambda r(x) \phi(x) \overline{\phi(x)} dx = \int_0^1 \phi(x) r(x) \overline{\lambda \phi(x)} dx \\
\iff & \int_0^1 \lambda r(x) \phi(x) \overline{\phi(x)} dx - \int_0^1 \phi(x) r(x) \overline{\lambda \phi(x)} dx = 0 \\
\iff & (\lambda - \bar{\lambda}) \int_0^1 r(x) \phi(x) \overline{\phi(x)} dx = 0 \\
\iff & (\lambda - \bar{\lambda}) \int_0^1 r(x) (w^2(x) + z^2(x)) dx = 0
\end{aligned}$$

Como,  $r(x) > 0$  e contínua em  $[0, 1]$ , da definição do P.S.L, e  $w^2(x) + z^2(x) > 0$  e contínua em  $[0, 1]$ , segue do Teorema 1 que  $\int_0^1 r(x) (w^2(x) + z^2(x)) dx > 0$  e portanto:

$$(\lambda - \bar{\lambda}) = (u + iv - (u - iv)) = 2iv = 0 \implies v = 0$$

Portanto, o autovalor  $\lambda = u + iv$  tem de ser da forma  $\lambda = u \in \mathbb{R}$ , ou seja todos os autovalores do P.S.L são reais. □

**Definição 1.** Sejam  $f_1, f_2, \dots, f_n$  funções. Definimos o Wronskiano de  $f_1, f_2, \dots, f_n$  no ponto  $t$ , como o determinante:

$$W(f_1, f_2, \dots, f_n)(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) & \cdots & f_n(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) & \cdots & f_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & f_2^{(n-1)}(t) & \cdots & f_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

**Definição 2.** Sejam  $y_1$  e  $y_2$  duas soluções de uma equação diferencial homogênea de segunda ordem. Assim definimos o Wronskiano de  $y_1$  e  $y_2$  no ponto  $t$ , como sendo o determinante:

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$$

**Teorema 4** (Teorema de Abel). Se  $y_1$  e  $y_2$  são duas soluções da equação diferencial

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

onde  $p$  e  $q$  são funções contínuas em um intervalo compacto  $I$ , então o wronskiano  $W(y_1, y_2)(t)$  é dado por

$$W(y_1, y_2)(t) = ce^{-\int p(t)dt}$$

onde  $c$  é um constante determinada que depende de  $y_1$  e  $y_2$ , mas não depende de  $t$ . Além disso,  $W(y_1, y_2)(t)$  ou é zero para todo  $t$  em  $I$ , ou nunca se anula em  $I$ .

**Teorema 5.** Seja  $y_1$  e  $y_2$  soluções da equação

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

onde  $p$  e  $q$  são contínuas em um intervalo compacto  $I$ . Então  $y_1$  e  $y_2$  são linearmente dependentes em  $I$  se, e somente se,  $W(y_1, y_2)(t) = 0$  para todo  $t \in I$ . De outro modo,  $y_1$  e  $y_2$  são linearmente independentes em  $I$  se, e somente se,  $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$  para todo  $t \in I$ .

**Teorema 6.** Os autovalores do Problema de Sturm-Liouville são todos simples, isto é, a cada autovalor corresponde apenas uma autofunção linearmente independente.

*Demonstração.* Seja  $\lambda$  um autovalor do Problema de Sturm-Liouville e considere  $\phi_1$  e  $\phi_2$  autofunções associadas à  $\lambda$ . Desta forma, se calcularmos o Wronskiano para  $\phi_1$  e  $\phi_2$  teremos:

$$W(\phi_1, \phi_2)(x) = \begin{vmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) \\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x) \end{vmatrix} = \phi_1(x)\phi_2'(x) - \phi_1'(x)\phi_2(x)$$

Como,  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são soluções para o Problema de Sturm-Liouville, devem satisfazer as condições de contorno, ou seja

$$\begin{cases} a_1\phi_1(0) + a_2\phi_1'(0) = 0 \\ a_1\phi_2(0) + a_2\phi_2'(0) = 0 \end{cases}$$

Isolando as funções  $\phi_1'$  e  $\phi_2'$ , obtemos

$$\phi_1'(0) = -\frac{a_1}{a_2}\phi_1(0) \quad \text{e} \quad \phi_2'(0) = -\frac{a_1}{a_2}\phi_2(0)$$

Substituindo estas relações no Wronskiano, chegamos que:

$$\begin{aligned} W(\phi_1, \phi_2)(0) &= \phi_1(0)\phi_2'(0) - \phi_1'(0)\phi_2(0) \\ &= \phi_1(0)\left(-\frac{a_1}{a_2}\phi_2(0)\right) - \left(-\frac{a_1}{a_2}\phi_1(0)\right)\phi_2(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como  $W(\phi_1, \phi_2)(0) = 0$ , segue do Teorema 4 que  $W(\phi_1, \phi_2)(t) = 0$  para todo  $t \in [0, 1]$  e assim, concluímos do Teorema 5 que  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são autofunções linearmente dependentes, contradizendo a suposição inicial. Desta forma, temos

$$\phi_2 = \alpha\phi_1$$

com  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Portanto, a cada autovalor do Problema de Sturm-Liouville corresponde apenas uma única autofunção linearmente independente, ou seja, o autovalor  $\lambda$  é simples.  $\square$

**Teorema 7.** Para cada autovalor do Problema de Sturm-Liouville existe uma autofunção real associada.

*Demonstração.* Considere  $\lambda$  um autovalor do Problema de Sturm-Liouville e seja  $\phi$  uma autofunção associada ao autovalor  $\lambda$ . Suponha que  $\phi = u + iv$ . Como  $\phi$  é autofunção do Problema de Sturm-Liouville, segue da definição que  $\phi$  satisfaz

$$L[\phi] = \lambda\phi$$

Assim, reescrevendo  $\phi$ , obtemos:

$$L[u + iv] = \lambda r(u + iv) \Leftrightarrow L[u] + iL[v] = \lambda ru + i(\lambda rv)$$

pela linearidade do operador  $L$ . Desta forma, segue que dois números complexos são iguais se, e somente se, suas partes reais e imaginárias são iguais, respectivamente. Logo:

$$L[u] = \lambda ru \text{ e } L[v] = \lambda rv$$

Ou seja,  $u$  e  $v$  são autofunções associadas à autovalor  $\lambda$ . Porém, isso contradiz o Teorema 6 que diz que todos os autovalores do Problema de Sturm-Liouville são simples. Assim, as autofunções  $U$  e  $v$  são linearmente dependentes, e portanto devemos ter que uma é múltipla escalar da outra, e assim para  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

$$v = \alpha u$$

Portanto, a autofunção  $\phi$  deve ser da forma:

$$\phi = u + iv = u + i(\alpha u) = u(1 + i\alpha) = \gamma u$$

com  $\gamma \in \mathbb{C}$ . Desta forma, se tomarmos  $\gamma = \mu + i0 \in \mathbb{R}$ , a autofunção  $\phi$  será real. Ou seja, temos que dado um autovalor, existe uma autofunção real associada a este autovalor.  $\square$

**Teorema 8.** *Se  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são duas autofunções do Problema de Sturm-Liouville, correspondentes aos autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  respectivamente, e se  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , então:*

$$\int_0^1 r(x)\phi_1(x)\phi_2(x)dx = 0$$

*Demonstração.* Considere  $\phi_1$  e  $\phi_2$  duas autofunções do Problema de Sturm-Liouville, associadas aos autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  respectivamente, de modo que  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Assim, segue da definição de autofunção que

$$L[\phi_1] = \lambda_1 \phi_1 r \text{ e } L[\phi_2] = \lambda_2 \phi_2 r$$

Pelo Teorema 2, temos

$$\langle L[u], v \rangle - \langle u, L[v] \rangle = 0$$

assim, fazendo  $u = \phi_1$  e  $v = \phi_2$ , chegamos em

$$\begin{aligned} & \langle L[\phi_1], \phi_2 \rangle - \langle \phi_1, L[\phi_2] \rangle = 0 \\ \Leftrightarrow & \int_0^1 L[\phi_1](x)\overline{\phi_2(x)}dx - \int_0^1 \phi_1(x)\overline{L[\phi_2](x)}dx = 0 \\ \Leftrightarrow & \int_0^1 \{\lambda_1 \phi_1(x)r(x)\overline{\phi_2(x)} - \phi_1(x)\overline{\lambda_2 \phi_2(x)r(x)}\}dx = 0 \end{aligned}$$

Por definição, a função peso  $r(x)$  é real. Como já vimos, segue do Teorema 3 que  $\lambda$  por ser um autovalor, deve ser real, e também segue do Teorema 7 que  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são autofunções reais. Portanto

$$\int_0^1 \{\lambda_1 \phi_1(x) r(x) \phi_2(x) - \phi_1(x) \lambda_2 \phi_2(x) r(x)\} dx = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^1 r(x) \phi_1(x) \phi_2(x) dx = 0$$

Como supomos que  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , segue que

$$\int_0^1 r(x) \phi_1(x) \phi_2(x) dx = 0$$

□

**Teorema 9.** *Os autovalores do P.S.L. formam uma sequência infinita e podem ser ordenados crescentemente, de modo que:*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$$

Além disso,  $\lambda_n \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

**Definição 3.** *As autofunções do P.S.L que satisfazem a condição:*

$$\int_0^1 r(x) \phi_n^2(x) dx = 1 \quad n = 1, 2, \dots$$

*são ditas normalizadas.*

Note que dado um autovalor  $\lambda$ , segue do Teorema 6, que existe uma única autofunção  $\phi_1$  linearmente independente associada ao autovalor  $\lambda$ , desta forma suponha que  $\phi_1$  é normalizada e considere  $\phi_2$  uma autofunção associada ao autovalor  $\lambda$  de modo que seja múltiplo escalar de  $\phi_1$ . Então:

$$\int_0^1 r(x) \phi_2^2(x) dx = \int_0^1 r(x) (\alpha \phi_1(x))^2 dx = \alpha^2 \int_0^1 r(x) \phi_1^2(x) dx = \alpha^2$$

Ou seja, a autofunção  $\phi_2$ , que é múltiplo escalar de  $\phi_1$ , não é uma autofunção normalizada.

**Definição 4.** *Um conjunto ortonormal  $B$  de vetores em um espaço de Hilbert  $H$  é dito ser um conjunto ortonormal completo em  $H$ , ou uma base ortonormal completa em  $H$ , se o único vetor de  $H$  que é ortogonal a todos os vetores de  $B$  for o vetor nulo.*

**Proposição 2.** *Considere o produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_r$  definido por:*

$$\langle u, v \rangle_r \doteq \int_0^1 r(x) u(x) v(x) dx$$

Onde  $r(x) > 0, \forall x \in [0, 1]$ . Assim, o conjuntos das autofunções normalizadas formam um conjunto ortonormal, segundo o produto interno acima.

*Demonstração.* Seja  $A$  o conjunto das autofunções normalizadas, e considere  $\phi_n, \phi_m \in A$  duas autofunções do P.S.L associadas a autovalores distintos, pois como já vimos combinações lineares de autofunções não são normalizadas. Assim:

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle_r = \int_0^1 r(x) \phi_n(x) \phi_m(x) dx = 0 \quad \text{Pelo Teorema 8}$$

Portanto,  $\phi_n \perp \phi_m$ , para todo  $n, m \in \mathbb{N}$ , tal que  $n \neq m$ . Agora, para  $\phi_m \in A$ , temos:

$$\|\phi_m\|^2 = \langle \phi_m, \phi_m \rangle_r = \int_0^1 r(x) \phi_m^2(x) dx = 1$$

E assim,  $\|\phi_m\| = 1$ . Logo, o conjunto das autofunções normalizadas é ortonormal.  $\square$

Podemos unir a proposição anterior com o Teorema 8, para isso vamos definir o símbolo  $\delta_{mn}$ , conhecido como Delta de Kronecker, por:

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}$$

Assim, chegamos no seguinte resultado:

**Corolário 2.**

$$\int_0^1 r(x) \phi_m(x) \phi_n(x) dx = \delta_{mn}$$

*Demonstração.* Segue diretamente da Proposição 2.  $\square$

**Proposição 3.** *Seja  $f$  uma função uniformemente contínua no intervalo  $[0, 1]$ , e suponha que  $f$  possa ser expandida em uma série infinita de autofunções do P.S.L, isto é:*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$$

onde as funções  $\phi_n$  satisfazem o P.S.L e a condição de ortogonalidade do Corolário 2. Assim, os coeficientes  $c_n$  são dados por:

$$c_n = \int_0^1 r(x) f(x) \phi_n(x) dx = \langle f, r\phi_n \rangle \quad n = 1, 2, \dots$$

*Demonstração.* Considere a função  $f$  expressa por uma série infinita de autofunções, assim:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) \tag{13}$$

Portanto, multiplicado a equação (13) por  $r(x)\phi_m(x)$ , para um certo  $m \in \mathbb{N}$  fixado e integrando ambos os membros no intervalo  $[0, 1]$ , chegamos que:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) r(x) \phi_m(x) dx &= \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n r(x) \phi_m(x) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^1 \phi_n r(x) \phi_m(x) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \delta_{mn} \end{aligned}$$

Utilizando a definição de  $\delta_{mn}$ , chegamos que para  $n = m$ :

$$c_m = \int_0^1 f(x) r(x) \phi_m(x) dx = \langle f, r\phi_m \rangle \quad m = 1, 2, \dots$$

$\square$

**Teorema 10.** *Sejam  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots$  as autofunções normalizadas do problema de Sturm-Liouville:*

$$\begin{cases} -[p(x)y']' + q(x)y = \lambda r(x)y \\ a_1y(0) + a_2y'(0) = 0 \\ b_1y(1) + b_2y'(1) = 0 \end{cases}$$

*Suponha que  $f$  e  $f'$  são seccionalmente contínuas em  $0 \leq x \leq 1$ . Então, a série:*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$$

*Com os coeficiente  $c_n$ , dados por:*

$$c_n = \int_0^1 r(x)f(x)\phi_n(x)dx = \langle f, r\phi_n \rangle$$

*converge para  $\frac{[f(x+) + f(x-)]}{2}$  em cada ponto do intervalo aberto  $0 < x < 1$ .*

## Problema de Sturm-Liouville Não-Homogêneo

Ao resolvermos equações diferenciais parcial sujeitas a valores de contorno e inicial, nos deparamos com problemas de Sturm-Liouville, como já vimos. Entretanto, a teoria que fizemos até agora, aborda apenas o caso homogêneo. Desta forma, precisamos encontrar um método para resolver o caso não-homogêneo, e como veremos, vamos recair em um problema de Sturm-Liouville homogêneo. Assim, considere o seguinte PSL generalizado

$$\begin{cases} -[p(x)y']' + q(x)y = \mu r(x)y + f(x) \\ a_1y(0) + a_2y'(0) = 0 \\ b_1y(1) + b_2y'(1) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Onde,  $\mu$  é uma constante e  $f$  é uma função definida no intervalo  $[0, 1]$ . Além disso, vamos supor que  $p, p', q$  e  $r$  são contínuas em  $[0, 1]$  e que  $p(x) > 0$  e  $r(x) > 0$  neste mesmo intervalo. Vamos definir, como havíamos feito antes, o operador  $L$ , dado por:

$$L[y] = -[p(x)y']' + q(x)y$$

Ou seja, nossa equação diferencial ordinária se reduz a seguinte expressão:

$$L[y] = \mu r(x)y + f(x)$$

Para resolver o problema (14), vamos considerar as autofunções associadas ao problema homogêneo. Ou seja, considere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} L[y] = \lambda r(x)y \\ a_1y(0) + a_2y'(0) = 0 \\ b_1y(1) + b_2y'(1) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Sejam, pelo Teorema 9,  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$  os autovalores do P.S.L (15) e as autofunções normalizadas  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots$  associadas aos autovalores correspondentes. Suponha que  $y = \phi(x)$  é uma solução de (14), e que possa ser expandida em:

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \phi_n(x) \quad (16)$$



Segue do Teorema 3, que:

$$b_n = \int_0^1 r(x)\phi(x)\phi_n(x)dx \quad \forall n \in \{1, 2, \dots\} \quad (17)$$

Entretanto, não conhecemos o valor de  $\phi$ , pois esta é a solução do problema que procuramos, assim vamos determinar  $b_n$  de modo a satisfazer o problema (14) e posteriormente substituir na equação (16). Note que  $\phi$  dado por (16) satisfaz as condições de contorno do problema (14), pois cada  $\phi_n$  é uma autofunção do problema (15) e portanto satisfazem as condições de contorno, e ainda mais a combinação linear de solução continua sendo uma solução, assim  $\phi$  satisfaz as condições de contorno de (14). Como supomos  $y = \phi(x)$  solução de (14), temos:

$$L[\phi] = \mu r(x)\phi(x) + f(x) \quad (18)$$

Substituindo (16) no lado esquerdo da equação (18), obtemos:

$$L[\phi](x) = L\left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n \phi_n\right](x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n L[\phi_n](x) \quad (19)$$

Portanto, segue que como  $\phi_n$  é uma autofunção do problema homogêneo (15), então  $L[\phi_n] = \lambda_n r \phi_n$  e assim:

$$L[\phi](x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \lambda_n r(x) \phi_n(x) \quad (20)$$

Como  $r(x) > 0$  para todo  $x \in [0, 1]$ , podemos multiplicar e dividir por  $r(x)$  o termo não homogêneo da equação (18), isto é:

$$L[\phi](x) = \mu r(x)\phi(x) + r(x) \frac{f(x)}{r(x)}$$

Logo, por (20), temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \lambda_n r(x) \phi_n(x) = \mu r(x)\phi(x) + r(x) \frac{f(x)}{r(x)}$$

Supondo que  $\frac{f(x)}{r(x)}$  satisfaz o Teorema 3, então:

$$\frac{f(x)}{r(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n$$

onde  $c_n$  é determinado por:

$$c_n = \int_0^1 r(x) \frac{f(x)}{r(x)} \phi_n(x) dx = \int_0^1 f(x) \phi_n(x) dx$$

Portanto, segue que:

$$r(x) \sum_{n=1}^{\infty} b_n \lambda_n \phi_n(x) = \mu r(x) \sum_{n=1}^{\infty} b_n \phi_n(x) + r(x) \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$$

Cancelando  $r(x) > 0$  e reorganizando os termos, obtemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{(\lambda_n - \mu)b_n - c_n\} \phi_n(x) = 0 \quad (21)$$

Para prosseguir, precisaremos utilizar o seguinte lema:

**Lema 2.** *Sejam  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots$  as autofunções normalizadas do P.S.L. Se  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$  converge a  $f(x)$ , onde  $f(x) = 0$  para todo  $x \in [0, 1]$ , então  $c_n = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Demonstração.* Considere  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots$  as autofunções normalizadas do P.S.L. Então, se tomarmos

$$0 = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$$

como  $f(x) = 0$  é uniformemente contínua no intervalo  $[0, 1]$ , segue da Proposição 3 que os coeficientes  $c_n$  são dados por

$$c_n = \int_0^1 r(x) \cdot 0 \cdot \phi_n(x) dx = 0 \quad n = 1, 2, \dots$$

Portanto, temos que  $c_n = 0$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . □

Assim, segue do Lema 2, que devemos ter  $(\lambda_n - \mu)b_n - c_n = 0$ . Portanto, temos de considerar os seguintes casos:

- (i)  $\lambda_n \neq \mu$ , para  $n = 1, 2, \dots$ , ou seja,  $\mu$  é diferente de todos os autovalores do problema homogêneo, e portanto segue que:

$$b_n = \frac{c_n}{\lambda_n - \mu}, \quad n = 1, 2, \dots$$

e conseqüentemente a solução do problema (14) é dada por:

$$y = \phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n - \mu} \phi_n(x)$$

- (ii)  $\lambda_m = \mu$  para algum  $m \in \mathbb{N}$ . Assim, temos que:

$$0 \cdot b_m - c_m = 0 \tag{22}$$

Então, precisamos considerar dois casos:

- Se  $\mu = \lambda_m$  e  $c_m \neq 0$  então é impossível resolver a equação (22) e conseqüentemente o problema (14) não tem solução.
- Se  $\mu = \lambda_m$  e  $c_m = 0$  então a equação (22) é satisfeita independente do valor de  $b_m$ , e portanto  $b_m$  é arbitrário. Neste caso, a solução do problema (14) possui infinitas soluções. Assim,  $c_m$  é dado pela equação, e estamos supondo  $c_m = 0$ , chegamos que:

$$\int_0^1 f(x) \phi_m(x) dx = 0$$

Ou seja, se  $\mu = \lambda_m$ , para algum  $m \in \mathbb{N}$ , o problema de valores de contorno não-homogêneo (14) só possui solução se  $f$  for ortogonal à autofunção associada ao autovalor  $\lambda_m$ .

**Teorema 11.** *O problema de valores de contorno não-homogêneo*

$$\begin{cases} -[p(x)y']' + q(x)y = \mu r(x)y + f(x) \\ a_1y(0) + a_2y'(0) = 0 \\ b_1y(1) + b_2y'(1) = 0 \end{cases}$$

tem uma única solução para cada  $f$  sempre que  $\mu$  for diferente de todos os autovalores do problema homogêneo correspondente. A solução é dada por:

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n - \mu} \phi_n(x)$$

e a série converge para todo  $x \in [0, 1]$ . Se  $\mu$  for igual a um autovalor  $\lambda_m$  do problema homogêneo correspondente, então o problema de valores de contorno não-homogêneo não tem solução, a menos que  $f$  seja ortogonal a  $\phi_m$ , isto é, a menos que a condição

$$\int_0^1 f(x)\phi_m(x)dx = 0$$

seja válida. Nessa caso, a solução não é única e contém um múltiplo arbitrário de  $\phi_m$ .

### 3 Problema de Condução de Calor Não-Homogêneo

Na seção 1, estávamos interessados em encontrar a solução formal para a equação do calor homogênea, sujeitas a certas condições de contorno e inicial. Para isso, utilizamos o método de separação de variáveis. Entretanto, quando generalizamos o problema, nos deparamos com Problemas de Sturm-Liouville mais gerais, e assim necessitamos de resultados auxiliares. Portanto, através dos resultados, obtidos a seção 2, sobre a Teoria de Sturm-Liouville fomos capazes de generalizar o método de separação de variáveis de modo à aplicar ao problema de condução de calor não-homogêneo. Deste modo, considere o seguinte problema

$$\begin{cases} r(x)u_t = [p(x)u_x]_x - q(x)u + F(x, t) \\ u_x(0, t) - h_1u(0, t) = 0 \quad u_x(1, t) + h_2u(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases} \quad (23)$$

Assim, vamos primeiramente considerar o caso homogêneo, ou seja,  $F(x, t) = 0$ . Então

$$r(x)u_t = [p(x)u_x]_x - q(x)u \quad (24)$$

Suponha que a solução do problema (23) pode ser expressa como uma produto de duas outras funções com variáveis independentes,  $u(x, t) = X(x)T(t)$ . Assim, aplicando  $u$  na equação (24), obtemos

$$r(x)X(x)T'(t) = [p(x)X'(x)T(t)]_x - q(x)X(x)T(t) \quad (25)$$

Como não estamos interessados nas soluções triviais do problema, podemos supor  $X(x) \neq 0$  e  $T(t) \neq 0$ , para todo  $x \in [0, 1]$  e  $t \in [0, \infty)$ . Desta forma, dividindo (25) por  $r(x)X(x)T(t)$ , temos

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{[p(x)X'(x)T(t)]_x}{r(x)X(x)T(t)} - \frac{q(x)}{r(x)} = -\lambda \quad (26)$$

Onde tomamos (26) igual a uma constante  $\lambda$ , devido ao fato que no lado esquerdo da igualdade depende apenas de  $t$ . Assim, para que relação seja satisfeita, tomamos a equação igual a uma constante. Isolando os termos em (26), chegamos em

$$-[p(x)X']' + q(x)X = \lambda r(x)X$$

Note que, como supomos  $u(x, t) = X(x)T(t)$ , ao aplicarmos as condições de contorno do problema (23), temos

$$\begin{aligned} u_x(0, t) - h_1 u(0, t) = 0 &\Rightarrow X'(0)T(t) - h_1 X(0)T(t) = 0 \\ &\Rightarrow X'(0) - h_1 X(0) = 0 \quad (\text{pois } T(t) \neq 0) \end{aligned}$$

Analogamente, obtemos  $X'(1) + h_2 X(1) = 0$ . Assim, vamos considerar o seguinte problema de contorno

$$\begin{cases} -[p(x)X']' + q(x)X = \lambda r(x)X \\ X'(0) - h_1 X(0) = 0 \\ X'(1) + h_2 X(1) = 0 \end{cases} \quad (27)$$

Se tomarmos  $p, q$  e  $r$  satisfazendo condições adequadas de continuidade e  $p(x) > 0$  e  $r(x) > 0$ , então (27) é um Problema de Sturm-Liouville. Logo, segue do Teorema 9 que existe uma sequência  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$  de autovalores e autofunções normalizadas correspondentes  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots$ . Agora, vamos supor que a solução do problema não-homogêneo (23) pode ser expressa como uma série de autofunções

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \phi_n(x) \quad (28)$$

Nosso objetivo é determinar um modo de calcular os coeficientes  $b_n(t)$  para assim, encontrarmos a solução do problema em questão. Assim, veja que as condições de contorno de (23) são satisfeitas por  $u$  dada em (28), pois cada  $\phi_n$ , por ser uma solução do problema, satisfaz as condições, isto é

$$\begin{aligned} u_x(0, t) - h_1 u(0, t) = 0 &\iff X'(0)T(t) - h_1 X(0)T(t) = T(t)(X'(0) - h_1 X(0)) \\ &= T(t)0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Analogamente, obtemos para a outra condição de contorno. Agora, vamos substituir  $u$  dada em (28) na equação do calor não-homogênea (23), então

$$\begin{aligned} r(x) \sum_{n=1}^{\infty} b'_n(t) \phi_n(x) &= [p(x) \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \phi'_n(x)]_x - q(x) \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \phi_n(x) + F(x, t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \{ [p(x) \phi'_n(x)]' - q(x) \phi_n(x) \} \end{aligned} \quad (29)$$

Note que, como  $\phi_n$  é uma autofunção do problema (27), então satisfaz a equação, isto é,

$$-[p(x) \phi'_n(x)]' + q(x) \phi_n(x) = \lambda_n r(x) \phi_n(x) \quad (30)$$

Sendo assim, substituindo (30) em (29), chegamos a seguinte igualdade

$$r(x) \sum_{n=1}^{\infty} b'_n(t) \phi_n(x) = -r(x) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n b_n(t) \phi_n(x) + F(x, t) \quad (31)$$

Nosso objetivo agora, é escrever  $F(x, t)$  como combinação de autofunções, para isso, suponha  $\frac{F(x, t)}{r(x)}$  e  $\left(\frac{F(x, t)}{r(x)}\right)'$  seccionalmente contínuas no intervalo  $[0, 1]$ . Então segue da Proposição 3 que,

$$\frac{F(x, t)}{r(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(t) \phi_n(x) \quad (32)$$

onde

$$\gamma_n(t) = \int_0^1 r(x) \frac{F(x, t)}{r(x)} \phi_n(x) dx = \int_0^1 F(x, t) \phi_n(x) dx$$

Observe que para calcular  $\gamma_n(t)$ , basta encontrarmos as autofunções normalizadas do PSL, pois  $F(x, t)$  é conhecida. Agora, substituindo (32) na equação (31), temos que

$$r(x) \sum_{n=1}^{\infty} b'_n(t) \phi_n(x) = -r(x) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n b_n(t) \phi_n(x) + r(x) \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(t) \phi_n(x)$$

e portanto, como  $r(x) \neq 0$  para todo  $x \in [0, 1]$ , temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \{b'_n(t) + b_n(t) \lambda_n - \gamma_n(t)\} = 0$$

Segue do Lema 2, que  $b'_n(t) + b_n(t) \lambda_n - \gamma_n(t) = 0$ , e conseqüentemente  $b_n(t)$  é solução da equação diferencial  $b'_n(t) + \lambda_n b_n(t) = \gamma_n(t)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Então, para determinarmos completamente  $b_n(t)$ , precisamos de uma condição inicial, assim considere  $b_n(0) = B_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Logo, obtemos o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} b'_n(t) + \lambda_n b_n(t) = \gamma_n(t) \\ b_n(0) = B_n \end{cases} \quad (33)$$

Para resolver o sistema (33), considere o fator integrante  $u(t) = e^{\lambda_n t}$ , desta forma:

$$\begin{aligned} b'_n(t) e^{\lambda_n t} + \lambda_n b_n(t) e^{\lambda_n t} &= e^{\lambda_n t} \gamma_n(t) \\ \int_0^s (b_n(t) e^{\lambda_n t})' dt &= \int_0^t e^{\lambda_n s} \gamma_n(s) ds \\ b_n(t) e^{\lambda_n t} &= \int_0^t e^{\lambda_n s} \gamma_n(s) ds + C_n \\ b_n(t) &= \int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} \gamma_n(s) ds + C_n e^{-\lambda_n t} \end{aligned}$$

Se tomarmos  $t = 0$ , temos

$$b_n(0) = \int_0^0 e^{\lambda_n s} \gamma_n(s) ds + C = B_n \Rightarrow B_n = C$$

Assim

$$b_n(t) = B_n e^{-\lambda_n t} + \int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} \gamma_n(s) ds \quad n = 1, 2, \dots$$

Para determinar  $B_n$ , vamos considerar a condição inicial do problema (23)  $u(x, 0) = f(x)$  e a suposição que  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \phi_n(x)$ , logo

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(0) \phi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \phi_n(x) = f(x)$$

e portanto, como  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \phi_n(x)$ , segue da Proposição 3 que

$$B_n = \int_0^1 r(x) f(x) \phi_n(x) dx \quad n = 1, 2, \dots$$

Agora, note que  $B_n$  depende de  $f(x)$ , que é a condição inicial do problema (23), e portanto para determinar  $B_n$ , basta calcular as autofunções normalizadas do problema (27). Portanto, chegamos que a solução formal do problema

$$\begin{cases} r(x)u_t = [p(x)u_x]_x - q(x)u + F(x, t) \\ u_x(0, t) - h_1 u(0, t) = 0 \quad u_x(1, t) + h_2 u(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

é da forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \phi_n(x)$$

onde  $\phi_n$  são as autofunções normalizados do Problema de Sturm-Liouville (27), cujo os coeficientes  $b_n(t)$  são determinados por

$$b_n(t) = B_n e^{-\lambda_n t} + \int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} \gamma_n(s) ds \quad n = 1, 2, \dots$$

onde

$$\gamma_n(t) = \int_0^1 F(x, t) \phi_n(x) dx \quad \text{e} \quad B_n = \int_0^1 r(x) f(x) \phi_n(x) dx \quad n = 1, 2, \dots$$

Assim, para usar este método para resolver um problema de valores de contorno na forma (23), é necessário:

1. Calcular os autovalores  $\lambda_n$  e as autofunções normalizadas  $\phi_n$  do P.S.L. correspondente.
2. Calcular os coeficientes  $B_n$  e  $\gamma_n(s)$ .
3. Calcular os coeficientes  $b_n(t)$ .
4. Calcular para onde converge a série  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \phi_n(x)$

## Referências

- [1] BOYCE, W.E. & DIPRIMA R.C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 8 ed. (1998). LT & C.
- [2] FIGUEIREDO, D.G. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. IMPA.
- [3] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um Curso de Cálculo*. vol 1. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, c1986.